BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2015

RİYAZİYYAT

УДК 519.622

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПОРЯДКА

Г.Ю.МЕХТИЕВА, З.Б.СЕИДОВ
Бакинский Государственный Университет
ibvag47@mail.ru

В работе численным способом разложения [2] исследуется краевая задача для дифференциального уравнения IV порядка. Строится явная разностная схема [1] для данной задачи и эта схема решается методом разложения.

Ключевые слова: способ разложения, явная разностная схема, вспомогательные функции.

Исследуемая краевая задача имеет вид:

$$
\begin{aligned}
& y^{IV} = a(x)y''' + b(x)y'' + c(x)y' + d(x)y + f(x) \qquad (0 \le x \le T) \\
& \alpha_0 y'(0) + \beta_0 y''(0) = \gamma_1, \\
& \alpha_1 y'(T) + \beta_1 y''(T) = \gamma_2, \\
& \int_0^T \delta(s)(y(s) + y'(s))ds = \gamma_3, \\
& \int_0^T \Delta(s)(y''(s) + y'''(s))ds = \gamma_4,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

здесь $\alpha_1 \neq 0, \beta_1 \neq 0.$

Введём функции

$$y' = v, v' = u, u' = w, \varphi(x) = \int_0^x \delta(s)(y(s) + v(s))ds,$$

$$\psi(x) = \int_0^x \Delta(s)(u(s) + w(s))ds.$$

Поэтому краевая задача сводится к двухточечной задаче для системы дифференциальных уравнений I порядка

$$\begin{aligned}
&y' = v, v' = u, u' = w, \varphi' = \delta(x)(y(x) + v(x)), \psi' = \Delta(x)(u(x) + w(x)),\\
&w' = a(x)w + b(x)u + c(x)v + d(x)g + f(x),\\
&\alpha_0 v(0) + \beta_0 u(0) = \gamma_1, \qquad\qquad (2)\\
&\alpha_1 v(T) + \beta_1 u(T) = \gamma_2,\\
&\varphi(0) = \psi(0) = 0,\ \varphi(T) = \gamma_3, \psi(T) = \gamma_4.
\end{aligned}$$

Разобьём отрезок $[0,T]$ на N равных частей с шагом h. Узловыми точками являются точки $x_0 = 0, x_1 = h, ..., x_N = T$.

Для краевой задачи (2) строится явная схема $[1]$:

$$\begin{aligned}
&y_{i+1} = y_i + hv_i, v_{i+1} = v_i + hu_i, u_{i+1} = u_i + hw_i,\\
&\varphi_{i+1} = \varphi_i + h\delta_i(y_i + v_i),\\
&\psi_{i+1} = \psi_i + \Delta_i(u_i + w_i),\\
&w_{i+1} = (1 + ha_i)w_i + hb_i u_i + hc_i v_i + hd_i y_i + hf_i, \qquad\qquad (3)\\
&\alpha_0 v_0 + \beta_0 u_0 = \gamma_1,\\
&\alpha_1 v_N + \beta_1 u_N = \gamma_2,\\
&\varphi_0 = \psi_0 = 0,\ \varphi_N = \gamma_3, \psi_N = \gamma_4.
\end{aligned}$$

В этой разностной схеме первоначальными неизвестными являются y_0, v_0, u_0, w_0. Для определения этих неизвестных сначала рассмотрим разложение вида:

$$V_i = R_i y_i + P_i u_i + Q_i w_i + S_i\ . \qquad (4)$$

Здесь заменим i на $i+1$ и учтём равенство (3):

$$\begin{aligned}
&R_i y_i + P_i u_i + Q_i w_i + S_i + hu_i = R_{i+1} y_i + hR_{i+1}(R_i y_i + P_i u_i + Q_i w_i + S_i) + P_{i+1} u_i + hP_{i+1} w_i +\\
&+ Q_{i+1}(1 + ha_i)w_i + hQ_{i+1} b_i u_i + hQ_{i+1} c_i (R_i y_i + P_i u_i + Q_i w_i + S_i) + hQ_{i+1} d_i y_i + hQ_{i+1} f_i + S_{i+1})\\
&(R_i + R_{i+1} - hR_{i+1} R_i - hQ_{i+1} c_i R_i - hQ_{i+1} d_i) y_i + (P_i + h - hR_{i+1} p_i - P_{i+1} - hQ_{i+1} b_i - hQ_{i+1} c_i P_i) u_i +\\
&+ (Q_i - hR_{i+1} Q_i - Q_{i+1}(1 + ha_i) - hQ_{i+1} c_i Q_i) w_i + S_i = S_{i+1} hQ_{i+1} f_i + hR_{i+1} S_i + hQ_{i+1} c_i S_i.
\end{aligned}$$

Потребуем, чтобы коэффициенты при y_i, u_i, w_i обращались в нуль. Тогда будем иметь:

$$R_i = \frac{R_{i+1} + hQ_{i+1}d_i}{1 - hR_{i+1} - hQ_{i+1}c_i}, \quad P_i = \frac{-h + P_{i+1} - hQ_{i+1}b_i}{1 - hR_{i+1} - hQ_{i+1}c_i}, \tag{5}$$

$$Q_i = \frac{Q_{i+1}(1 + ha_i)}{1 - hR_{i+1} - hQ_{i+1}c_i}, \quad S_i = \frac{hQ_{i+1} f_i + S_{i+1}}{1 - hR_{i+1} - hQ_{i+1}c_i}.$$

В равенстве (4) положим $i = N$ и учтём равенство

$$V_N = \frac{1}{\alpha_1}(\gamma_2 - \beta_1 u_N).$$

Поэтому имеем

$$R_N = 0, P_N = -\frac{\beta_1}{\alpha_1}, Q_N = 0, S_N = \frac{\gamma_2}{\alpha_1}.$$

Из равенства (5) определяется $R_{N-1}, P_{N-1}, Q_{N-1}, S_{N-1}, ..., R_0, P_0, Q_0, S_0$. В равенство (4) положим $i = 0$, тогда имеется уравнение относительно неизвестных y_0, v_0, u_0, w_0

$$V_0 = R_0 y_0 + P_0 u_0 + Q_0 w_0 + S_0.$$

Теперь рассмотрим разложение вида:

$$u_i = R'_i y_i + P'_i v_i + Q'_i w_i + S'_i. \tag{6}$$

Аналогичным способом получим рекуррентные выражения для R'_i, P'_i, Q'_i, S'_i.

Из граничного условия имеем

$$u_N = \frac{1}{\beta_1}(\gamma_2 - \alpha_1 v_N). \tag{7}$$

Поэтому имеем

$$R'_N = 0, P'_N = -\frac{\alpha_1}{\beta_1}, Q'_N = 0, S'_N = \frac{\gamma_2}{\beta_1}.$$

Таким образом, определяются $R'_{N-1}, P'_{N-1}, Q'_{N-1}, S'_{N-1}, ..., R'_0, P'_0, Q'_0, S'_0$.

Пологая, что в (7) $i = 0$ имеет ещё одно уравнение для неизвестных y_0, v_0, u_0, w_0.

$$u_0 = R'_0 y_0 + P'_0 v_0 + Q'_0 w_0 + S'_0. \tag{8}$$

Рассматривая разложения вида

$$\varphi_i = R_i'' y_i + P_i'' v_i + Q_i''' u + E_i'' w_i + S_i'',$$

$$\psi_i = R_i''' y_i + P_i''' v_i + Q_i''' u + E_i''' w_i + S_i''',$$

получим ещё два уравнения для первоначальных неизвестных

$$R_0''y_0 + P_0''v_0 + Q_0'''u_0 + E_0''w_0 + S_0'' = 0$$
$$R_0'''y_0 + P_0'''v_0 + Q_0'''u_0 + E_0'''w_0 + S_0''' = 0. \qquad (9)$$

Первоначальные неизвестные y_0, v_0, u_0, w_0 есть решения системы уравнений (6), (8), (9).

Значение решения и значения её производных узловых точках находятся по разностной схеме (3).

В заключение отметим, что если y_i значение решение разностной схемы (3), а $y(x_i)$ точное значение решения дифференциальной задачи, то имеет место $|y(x_i) - y_i| \le ch.$ Здесь $c > 0$ не зависит от h.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989, 425с.
2. Беллман Р., Энджел Э. Динамическое программирование и уравнения в частных производных. М.: Мир, 1974, 186 с.

IV TƏRTİB DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR ÜÇÜN İNTEQRAL ŞƏRTLƏRLİ SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN ƏDƏDİ HƏLLİ

Q.Y.MEHDİYEVA, Z.B.SEYİDOV

XÜLASƏ

Məqalədə IV tərtib diferensial tənliklər üçün inteqral şərtlərli sərhəd məsələsinin ədədi həlli öyrənilir. Baxılan məsələ üçün aşkar fərq sxemi qurulur və bu sxem ayırma üsulu ilə həll edilir.

Açar sözlər: ayırma üsulu, aşkar fərqlər sxemi, köməkçi funksiyalar.

NUMERİCAL SOLUTİON OF BOUNDARY-VALUE PROBLEMS WİTH THE INTEGRAL CONDITIONS FOR THE DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE FOURTH ORDER

G.Yu.MEHDİYEVA, Z.B.SEYİDOV

SUMMARY

In the paper the solution of boundary value problems for the differential equations of the fourth order is investigated. Explicit two-layered difference scheme is constructed for this boundary-value problem, and this scheme is solved by the method of separation.

Key words: method of separation, explicit difference scheme, auxiliary functions.

Redaksiyaya daxil oldu: 13.03.2015-ci il
Çapa imzalandı: 20.04.2015-ci il